РАЗДЕЛ I
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 621.73

Алюшин Ю. А.
Сидоров А. А.

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ВЫСАДКЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДЕТАЛЕЙ С ФЛАНЦЕМ

При разработке новых технологических процессов, как правило, проводят анализ напряженно-деформированного состояния заготовки с определением мощности и усилий, если предполагается штамповка на прессе, или энергии для ковки на молоте. В справочной и учебной литературе [1–3] имеется достаточно рекомендаций для их расчёта. Существенно меньше информации по определению кинематических характеристик процессов. Например, для учёта упрочнения материала или прогнозирования предельных степеней деформации необходимо знать усреднённые по объёму или локальные характеристики деформированного состояния, используемые в соответствующих методах теории пластичности [1–6]. В последнее время уделяют внимание целенаправленному влиянию на волокнистое строение заготовок с целью повышения долговечности машиностроительных деталей.

В соответствии с рекомендациями [1–2], в зависимости от относительной длины высаживаемой части заготовки, высадку можно проводить в один или два перехода. Во втором случае на первом переходе происходит набор металла в области фланца, из которого он формируется на втором переходе.

Целью работы является построение кинематически возможных полей скоростей для различных вариантов высадки с последующим определением уравнений движения в форме Лагранжа для осевых (z) и радиальных (ρ) координат, которые позволяют найти энергосиловые параметры процесса и любые кинематические характеристики, в том числе для оценки предельных условий деформации.

Поле скоростей и траектории частиц предполагаются симметричными относительно оси процесса, радиальная компонента скорости $u(\rho,z,h)=0$ при $\rho=0$. Осевая компонента скорости $w(\rho,z,h)$ отсутствует на нижней торцевой плоскости зоны деформации ($w=0$ при $z=0$) и равна скорости пуансона $w=v_n$ на верхней контактной поверхности при $z=h$.

С учётом отмеченных выше граничных условий и предполагая неоднородное деформированное состояния по объёму очага деформации, принимаем поле скоростей:

$$u=-v_n\frac{z\rho}{h^2};\quad w=v_n\frac{z^2}{h^2} \tag{1}$$

с компонентами тензора скорости деформации:

$$s_\rho=-v_n\frac{z}{h^2};\qquad s_\varphi=-v_n\frac{z}{h^2};\qquad s_z=2v_n\frac{z}{h^2};\qquad s_{\rho z}=-v_n\frac{\rho}{h^2}, \tag{2}$$

при этом локальное условие постоянства объёма выполняется:

$$s_\rho+s_\varphi+s_z=0.$$

Чтобы найти уравнения движения в форме Лагранжа, необходимо проинтегрировать дифференциальные уравнения, например, для осевой координаты:

$$\frac{dz}{dt} = v_n \frac{z^2}{h^2} \quad \text{или} \quad \frac{dz}{z^2} = v_n dt \frac{1}{h^2} = \frac{dh}{h^2}.$$

В результате получаем:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} = \frac{1}{h} - \frac{1}{h_0}.$$

Откуда следует:

$$\frac{z_0 - z}{zz_0} = \frac{h_0 - h}{hh_0}.$$

И окончательно:

$$z = z_0 \frac{hh_0}{hh_0 + z_0(h_0 - h)} \qquad \text{или} \qquad \frac{z}{h} = \frac{z_0 h_0}{z_0 h_0 + h(h_0 - z_0)}, \tag{3}$$

где z_0, h_0 – начальные значения осевой координаты частицы и высоты заготовки, соответственно, z, h – их текущие значения.

На нижней и верхней плоскостях граничные условия выполняются не только для скорости w, но и для координат: при $z_0 = 0$ сохраняется $z = 0$, а при $z_0 = h_0$ имеем $z = h$.

Используя результат (2), можно получить уравнение в форме Лагранжа для радиальной координаты:

$$\frac{d\rho}{dt} = -v_n \frac{\rho z}{h^2} \qquad \text{или} \qquad \frac{d\rho}{\rho} = -v_n dt \frac{z}{h^2} = -\frac{zdh}{h^2} = -\frac{z_0 h_0}{h[z_0 h_0 + h(h_0 - z_0)]} dh.$$

Интеграл полученного дифференциального уравнения:

$$\ln\rho = -\frac{z_0 h_0}{h_0 - z_0} \int \frac{1}{h(\frac{z_0 h_0}{h_0 - z_0} + h)} dh = -\frac{z_0 h_0}{h_0 - z_0}\left(-\frac{h_0 - z_0}{z_0 h_0}\right) \ln\left|\frac{z_0 h_0}{h(h_0 - z_0)} + 1\right| = \ln\left[\frac{z_0 h_0 + h(h_0 - z_0)}{h(h_0 - z_0)}\right]$$

и начальные условия $\rho = \rho_0$ при $h = h_0$ позволяют записать окончательный результат:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{z_0 h_0 + h(h_0 - z_0)}{hh_0} \quad \text{или} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{z_0 h_0 + h(h_0 - z_0)}{hh_0} = \frac{z_0}{z}. \tag{4}$$

На первый взгляд кажется невероятным соотношение $\rho_0 z_0 = \rho z$, которое имеет место при однородной осадке в условиях плоской деформации, но проверка интегрального условия постоянства объёма по конечному и начальному состояниям подтверждает правильность полученного решения.

Действительно, в исходном состоянии объём цилиндрической заготовки составляет:

$$V_0 = \pi\rho_0^2 h_0.$$

Чтобы найти значение объёма в конечном состоянии, следует найти интеграл:

$$V_k = 2\pi\int \rho d\rho dz = 2\pi\int \frac{\rho^2}{2} dz = \pi\int_0^{h_0} \rho_0^2 \left(\frac{hh_0 + z_0(h_0 - h)}{hh_0}\right)^2 d\left[z_0 \frac{hh_0}{hh_0 + z_0(h_0 - h)}\right],$$

который преобразуется к виду:

$$V_k = \pi\rho_0^2 \int_0^{h_0} \left(\frac{hh_0 + z_0(h_0 - h)}{hh_0}\right)^2 \left[\frac{hh_0[hh_0 + z_0(h_0 - h) - z_0(h_0 - h)]}{[hh_0 + z_0(h_0 - h)]^2}\right] dz_0 ,$$

и в результате имеем:

$$V_k = \pi\rho_0^2 \int_0^{h_0} dz_0 = \pi\rho_0 h_0 .$$

Обратим внимание, что считать конечную форму в меридиональном сечении в виде примыкающих прямоугольника и треугольника нельзя (см. рис. 2, а).

Из кинематических характеристик для рассматриваемого первого перехода приведём соотношения для интенсивности скорости деформации сдвига. С учётом компонент (2) получаем достаточно простое соотношение через текущие координаты частицы:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(s_\rho - s_\varphi)^2 + (s_\varphi - s_z)^2 + (s_z - s_\rho)^2 + (3/2)s_{\rho z}^2} = \frac{v_n}{h^2}\sqrt{12z^2 + \rho^2} \qquad (6)$$

и более сложное через начальные координаты (в форме Лагранжа):

$$H = \frac{v_n}{h^3 h_0[hh_0 + z_0(h_0 - h)]}\sqrt{12z_0^2(hh_0)^4 + \rho_0^2[hh_0 + z_0(h_0 - h)]^4} . \qquad (7)$$

На плоскости $z_0 = 0$ имеем $H = v_0\rho_0 / h^2$, на оси z, при $\rho_0 = 0$:

$$H = \frac{\sqrt{12} v_n z_0 h_0}{h[hh_0 + z_0(h_0 - h)]} .$$

На первый взгляд может показаться, что усилия и мощность легче определить с использованием более простой подынтегральной функции (6), однако для неё более сложный вид имеет область интегрирования. Для осевой координаты это $0 \le z \le h$, а для радиальной $0 \le \rho \le r_k$, где r_k – радиус боковой поверхности заготовки в рассматриваемый момент времени, который определяет уравнение (4) при исходном радиусе заготовки $\rho_0 = r_{0k}$. Преимущество уравнения (7) состоит в том, что при интегрировании по объёму область определения всегда совпадает с формой исходной заготовки $0 \le \rho_0 \le r_{0k}$, $0 \le z_0 \le h_0$. Оно также не требует поэтапного преобразования эйлеровых координат в лагранжевы при расчёте параметра Одквиста:

$$\Lambda = \int H dt , \qquad (8)$$

который предполагает интегрирование скорости деформации именно для фиксированных частиц заготовки с учётом конкретных условий деформирования [4–5]. В аналитической форме окончательный результат имеет громоздкий вид, поэтому можно рекомендовать воспользоваться численными методами. Для «монотонных» процессов, когда не предполагается промежуточных разгрузок и дополнительных вариантов нагружения, вместо параметра Одквиста (8) можно воспользоваться среднеквадратическим отклонением относительных длин рёбер частиц в форме параллелепипеда от их среднего значения [6]:

$$\Gamma = \sqrt{\Gamma_e^e - 3} , \qquad (9)$$

где $$\Gamma_e^2 = \left(\frac{\partial\rho}{\partial\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)^2 . \qquad (10)$$

Входящие в правую часть производные можно определить из уравнений (3) и (4).

Высадку в один переход на большей части процесса приближённо можно рассматривать как осадку цилиндра между параллельными плитами, когда сферическая форма пуансона отождествляется с зоной «мёртвого» металла и полным прилипанием заготовки на плоской поверхности пуансона. По существу процесс сводится к двусторонней высадке или неоднородной осадке с образованием бочки.

За основу берём уравнение для радиальной компоненты скорости:

$$u = v_1 \frac{z\rho(h-z)}{h^3} = v_1 \frac{\rho}{h}\xi(1-\xi), \tag{11}$$

где $\xi = z/h$ – относительная осевая координата. Уравнению (11) соответствуют компоненты радиальной и окружной скорости деформации:

$$s_\rho = s_\varphi = v_1 \frac{z(h-z)}{h^3} = v_1 \frac{1}{h}\xi(1-\xi).$$

Для выполнения условия постоянства объёма осевую скорость деформации должно определять уравнение:

$$s_z = -2v_1 \frac{z(h-z)}{h^3} = -2v_1\xi(1-\xi)$$

и соответствующая компонента осевой скорости:

$$dw = -2v_1 \frac{z(h-z)}{h^3} dz = -2v_1\xi(1-\xi)d\xi.$$

Отсюда находим:

$$w = -2v_1\left(\frac{1}{2}\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3}\frac{z^3}{h^3}\right) = -\frac{1}{3}v_1\left(3\frac{z^2}{h^2} - 2\frac{z^3}{h^3}\right) = -v_1\frac{1}{3}\xi^2(3-2\xi). \tag{12}$$

Из граничного условия $w = v_{n\_}$ при $z = h$ находим константу v_1:

$$w = -\frac{1}{3}v_1 = v_n \quad \text{или} \quad v_1 = -3v_n. \tag{13}$$

С учётом этого результата для компонент скорости окончательно получаем:

$$u = -3v_n \frac{z\rho(h-z)}{h^3} = -3v_n \frac{\rho}{h}\xi(1-\xi), \tag{14а}$$

$$w = v_n\left(3\frac{z^2}{h^2} - 2\frac{z^3}{h^3}\right) = v_n\xi^2(3-2\xi). \tag{14б}$$

Уравнения движения в форме Лагранжа определяем по использованному выше алгоритму. Записываем уравнение (14б) в виде:

$$\frac{dz}{dt} = v_n\left(3\frac{z^2}{h^2} - 2\frac{z^3}{h^3}\right) = v_n\xi^2(3-2\xi)$$

или, с учётом:

$$v_n dt = dh, \tag{15}$$

$$dz = \left(3\frac{z^2}{h^2} - 2\frac{z^3}{h^3} \right) dh = \xi^2 (3 - 2\xi) dh .$$

В дальнейшем рассматриваем вторую форму записи с безразмерной осевой координатой $\xi = z/h$, преобразуя левую часть к виду:

$$dz = hd\xi + \xi dh, \quad hd\xi + \xi dh = \xi^2 (3 - 2\xi) dh \qquad (16)$$

или:

$$\frac{dh}{h} + \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)(1-2\xi)} = 0 . \qquad (17)$$

В результате интегрирования получаем:

$$\ln(h) + \ln\left(\frac{\xi(1-\xi)}{(1-2\xi)^2} \right) = \ln(C_0) ,$$

откуда

$$h\frac{\xi(1-\xi)}{(1-2\xi)^2} = C_0 . \qquad (18)$$

Константу C_0 с размерностью [м] находим из начального условия:

$$C_0 = h_0 \frac{\xi_0 (1-\xi_0)}{(1-2\xi_0)^2} . \qquad (19)$$

Принимая во внимание обозначение $\xi = z/h$, запишем:

$$hz(h-z) = C_0 (h-2z)^2$$

и, решая квадратное уравнение для осевой координаты:

$$z^2 (4C_0 + h) - zh(4C_0 + h) + C_0 h^2 = 0 ,$$

получим:

$$z = \frac{h}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{h}{4C_0 + p}} \right) . \qquad (20)$$

Проверку результата для сокращения математических преобразований целесообразно проводить на этапе определения константы интегрирования, т. е. для уравнения (8). Дифференцируя, получаем:

$$dh\frac{\xi(1-\xi)}{(1-2\xi)^2} + hd\left(\frac{\xi(1-\xi)}{(1-2\xi)^2} \right) = 0 \text{ или } dh\frac{\xi(1-\xi)}{(1-2\xi)^2} + h\frac{(1-2\xi)(1-2\xi)^2 + 4(1-2\xi)\xi(1-\xi)}{(1-2\xi)^4} d\xi = 0 .$$

После преобразований получаем:

$$dh\frac{\xi(1-\xi)}{(1-2\xi)^2} + h\frac{(1-2\xi)(1-4\xi+4\xi^2+4\xi-4\xi^2)}{(1-2\xi)^4} d\xi = 0 ; \quad dh\frac{\xi(1-\xi)}{(1-2\xi)^2} + h\frac{(1-2\xi)}{(1-2\xi)^4} d\xi = 0$$

или, окончательно:

$$\frac{dh}{h}+\frac{d\xi}{\xi(1-\xi)(1-2\xi)}=0,$$

что совпадает с исходным уравнением (17).

При $z_0 = 0$ и при $z_0 = h_0$ получаем $C_0 = 0$ и при знаке «–» имеем $z = 0$, а при знаке «+» – $z = h$. Сечение $z_0 = h_0 / 2$ остаётся на протяжении всего процесса посредине высоты, так как при $C_0 = \infty$ получаем $z = h/2$.

Для радиальной компоненты скорости исходное уравнение (14а) с учётом (18) преобразуем к виду:

$$u=-3v_n\frac{\rho}{h}\xi(1-\xi)=-3v_nC_0\frac{\rho}{h^2}(1-2\xi)^2=\frac{d\rho}{dt}.$$

Принимая во внимание (15), находим:

$$\frac{d\rho}{\rho}+3C_0\frac{dh}{h^2}(1-2\xi)^2=0.$$

Последний множитель второго слагаемого заменяем с помощью уравнения (20):

$$(1-2\xi)^2=\frac{h}{4C_0+h} \quad \text{или} \quad (1-2\xi)^2=h\frac{\xi(1-\xi)}{C_0}=\frac{h}{4C_0+h}.$$

В результате получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\rho}{\rho}+3C_0\frac{dh}{h^2}\frac{h}{4C_0+h}=0$$

и интегралом:

$$\ln(\rho)-\frac{3}{4}\ln\left(\frac{4C_0+h}{h}\right)=\ln(C_1).$$

Константу C_1, как и в предыдущем случае, находим из начального условия:

$$\rho=\rho_0\left[\frac{h_0(4C_0+h)}{h(4C_0+h_0)}\right]^{3/4}. \tag{21}$$

Граничные условия для радиальной координаты выполняются: при $\rho_0 = 0$ получаем $\rho = 0$, при $z_0 = 0$, $C_0 = 0$ и $\rho = \rho_0$, при $z_0 = h_0$, $C_0 = 0$ и $\rho = \rho_0$, при $z_0 = h_0/2$ – $C_0 = \infty$ и $\rho = \rho_0\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы избежать неопределённости, целесообразно предусматривать смещение от центрального сечения, например, принимая $z_0 = h_0/2 \pm 0{,}00001$.

Характеристики деформированного состояния для рассматриваемого процесса определяют производные:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\rho_0}=\frac{\rho}{\rho_0}=\left[\frac{h_0(4C_0+h)}{h(4C_0+h_0)}\right]^{3/4};\quad \frac{\partial\rho}{\partial z_0}=\frac{3}{4}\rho_0\frac{h_0-h}{(4C_0+h)^2}\left(\frac{h_0}{h}\right)^{3/4}\frac{1}{(1-2\xi_0)^3}\left(\frac{4C_0+h_0}{4C_0+h}\right)^{1/4};$$

$$\frac{\partial z}{\partial\rho_0}=0;\quad \frac{\partial z}{\partial z_0}=\frac{\partial z}{\partial C_0}\frac{\partial C_0}{\partial z_0}=\mp\frac{h}{4}\left(\frac{h}{4C_0+h}\right)^{-1/2}\frac{4h}{(4C_0+h)^2(1-2\xi)^3}.$$

Якобиан преобразования (20) и (21) в аналитической форме преобразуется в громоздкое выражение, но численными расчётами легко убедиться, что условие постоянства объёма выполняется в форме:

$$R=\frac{\delta V}{\delta V_0}=\frac{\rho}{\rho_0}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\rho}{\partial\rho_0} & \dfrac{\partial\rho}{\partial z_0}\\ \dfrac{\partial z}{\partial\rho_0} & \dfrac{\partial z}{\partial z_0}\end{bmatrix}=1\,.$$

С учётом скорости деформации сдвига:

$$s_{\rho z}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\rho}=-3v_n\frac{\rho(h-2z)}{h^3}=-3v_n\frac{\rho}{h^2}(1-2\xi)$$

можно посчитать интенсивность скорости деформации сдвига (6):

$$H=\frac{v_n}{h}\sqrt{54\xi^2(1-\xi)^2+9(\rho/h)^2(1-2\xi)^2}\ ,$$

параметр упрочнения Одквиста (8) и энергетическую меру деформации (10). По результатам расчётов можно констатировать примерное равенство для рассматриваемых монотонных процессов деформации:

$$\Lambda=\int Hdt\approx\sqrt{\Gamma_e^e-3}=\Gamma\ .$$

Решение (18) и (20) за счёт использования принципа суперпозиции [7] с траекториями для однородной деформации:

$$\rho=\rho_0\sqrt{\frac{h_0}{h}}\,;\quad z=z_0\frac{h}{h_0}$$

можно распространить на промежуточные процессы осадки с произвольным трением. При этом следует из общего перемещения пуансона выделить часть, которая соответствует однородной деформации, и вторую часть с неоднородной деформацией. Если принять, что в диапазоне $h_1\le z\le h_0$ деформация однородна, а при $h_k\le z\le h_1$ – неоднородна и оба процесса протекают одновременно, тогда уравнения совмещённого движения принимают вид:

$$\rho=\rho_0\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}\left[\frac{h_1(4C_{01}+h)}{h(4C_{01}+h_1)}\right]^{3/4};\quad z=\frac{h}{2}\left(1\pm\sqrt{\frac{h}{4C_{01}+p}}\right),\qquad(22)$$

где $C_{01}=h_1\dfrac{\xi_1(1-\xi_1)}{(1-2\xi_1)^2}$; $\xi_1=\dfrac{z}{h_1}$.

Особо следует отметить, что уравнения (20) и (22) имеют два решения: в верхней части заготовки перед квадратным корнем следует брать знак «+», а в нижней – знак «–».

В заключительной стадии второго перехода можно воспользоваться полем скоростей из работы [1] с застойной зоной в виде параболоида или для раздачи заготовки сферическим пуансоном с траекториями частиц:

$$\rho^2(h+R)+(2/3)(R^2-\rho^2)^{3/2}=\rho_0^2(h_0+R)+(2/3)(R^2-\rho_0^2)^{3/2};$$

$$z=z_0\frac{h}{h_0}\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{h\sqrt{R^2-\rho^2}}-\frac{\rho_0^2}{h_0\sqrt{R^2-\rho_0^2}}\right)\right),$$

где R – радиус пуансона, или наложением этих траекторий на рассмотренные выше.

Чтобы наблюдать изменение волокнистой структуры заготовок при различных вариантах высадки и отношениях h/h_0, достаточно рассчитать текущие радиальные координаты по уравнениям (4) и (21) при фиксированных значениях начальных радиусов ρ_0 во всём диапазоне изменения осевых координат $0 \le z_0 \le h_0$.

Для расчёта усилий в конечной стадии высадки можно применять, наряду с рекомендуемыми в справочных и учебных изданиях [1–3], поля скоростей и уравнения движения для обратного выдавливания. Учитывая многообразие вариантов исследуемого процесса и соответствующих ему кинематических характеристик, результаты расчётов будут представлены во время презентации доклада.

ВЫВОДЫ

Предлагаемые варианты полей скоростей и уравнений движения в форме Лагранжа для высадки осесимметричных деталей с фланцем удовлетворяют граничным условиям, а также условиям постоянства объёма в дифференциальной и интегральной формах. Показана возможность их применения совместно с принципом суперпозиции для исследования реальных процессов, корректировки решений на основе визуального сравнения экспериментально наблюдаемых и рассчитанных траекторий частиц деформируемого материала с учётом особенностей очага деформации. Дифференцирование уравнений движения по времени и переменным Лагранжа позволяет определять любые локальные и среднеинтегральные характеристики деформированного состояния, мощность и усилия деформации с учётом упрочнения материала.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Теория ковки и штамповки: учеб. пособие / Е. П. Унксов, У. Джонсон, В. Л. Колмогоров и др. – М. : Машиностроение, 1992. – 720 с., ил.*
2. *Джонсон У. Теория пластичности для инженеров / У. Джонсон, Л. Меллор. – М. : Машиностроение, 1979. – 598 с., ил.*
3. *Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением / В. Л. Колмогоров. – М. : Металлургия, 1986. – 688 с.*
4. *Алюшин Ю. А. Энергетическая модель обратимых и необратимых деформаций / Ю. А. Алюшин, С. А. Еленев, С. А. Кузнецов. – М. : Машиностроение, 1995. – 128 с., ил.*
5. *Алюшин Ю. А. Общая методика решения задач динамики с лагранжевым описанием движения / Ю. А. Алюшин // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2007. – № 6. – С. 23–32.*
6. *Алюшин Ю. А. Механика процессов деформации в пространстве переменных Лагранжа: учеб. пособие для вузов / Ю. А. Алюшин. – М. : Машиностроение, 1997. – 136 с.*
7. *Алюшин Ю. А. Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2001. – № 3. – С. 13–19.*

Алюшин Ю. А. – д-р техн. наук, проф. МГГУ;

Сидоров А. А. – аспирант МГГУ.

МГГУ – Московский государственный горный университет, г. Москва, Россия.

E-mail: alyushin7@gmail.com.

Статья поступила в редакцию 12.02.2012 г.